# Integreerbare Evolutievergelijkingen: een Diophantische Aanpak

Samenvatting

## Waar gaat dit proefschrift over?

Veel processen in de natuur kunnen worden beschreven met behulp van evolutievergelijkingen. Kenmerkend voor een **evolutievergelijking** is dat de toestand op tijdstip $t$ in principe berekend kan worden wanneer deze gegeven is op tijdstip $t_0 < t$. De Korteweg-De Vries vergelijking is een mooi voorbeeld van zo'n evolutievergelijking:

$$u_t = u_3 + uu_1 \quad (KDV).$$

Hierin is $u$ een functie van $x$ en $t$, $u_t$ de afgeleide van $u$ naar $t$ en $u_i$ de $i$-de afgeleide van $u$ naar $x$. De KDV-vergelijking werd al in de negentiende eeuw afgeleid en beschrijft de beweging van lange golven in smalle en relatief ondiepe kanalen. In zo'n kanaal kan het voorkomen dat een berg water zich over het oppervlak blijft voortbewegen. Hier werd voor het eerst over geschreven door Russell die middels experimenten aantoonde dat dergelijke golven elkaars vorm niet verstoren.

Halverwege de twintigste eeuw bleek de KDV-vergelijking een rol te spelen in diverse andere takken van de natuurkunde. Men herondekte de gelokaliseerde en stabiele oplossing, de zogenaamde 'soliton', en ging op zoek naar een verklaring voor dit interessante fenomeen. Deze kwam in de vorm van behoudswetten. De bekende behoudswetten, die van impuls en energie, bleken er slechts twee van de oneindig vele te zijn. Dit leidde tot de 'inverse scattering' methode, een methode waarmee o.a. de KDV vergelijking exact kon worden opgelost.

Een evolutievergelijking die exact opgelost kan worden, bijvoorbeeld door 'inverse scattering' of door 'linearisatie', wordt **integreerbaar** genoemd. Het blijkt zo te zijn dat iedere integreerbare evolutievergelijking oneindig veel gegeneraliseerde symmetrieën bezit. Voor de KDV vergelijking zijn deze gerelateerd aan haar behoudswetten door een stelling van Noether. Maar ook Burgers' vergelijking, waarvoor slechts één behoudswet geldt, heeft oneindig veel symmetieën. Dit proefschrift gaat over het herkennen en classificeren van integreerbare evolutievergelijkingen met betrekking tot het bestaan van gegeneraliseerde symmetrieën.

# Waar stoelt dit proefschrift op?

De volgende ontwikkelingen zijn van groot belang geweest voor het onderzoek dat beschreven wordt in dit proefschrift.

1. Het vermoeden bestond dat wanneer een evolutievergelijking één symmetrie heeft, ze er oneindig veel heeft. Dit werd gepreciseerd door Fokas in 1987.

   > Vermoeden van Fokas:
   > Als een scalaire vergelijking minstens één symmetrie bezit, dan bezit ze er oneindig veel. Evenzo, als een vergelijking met $n$ componenten $n$ symmetrieën heeft, dan heeft ze er oneindig veel.

2. Voor $n = 1$ werd dit vermoeden bevestigd in de klasse van $\lambda$-homogene scalaire vergelijkingen (met $\lambda \geq 0$):

   $$u_t = u_n + f(u, u_1, \ldots, u_{n-1}).$$

   De classificatie van deze vergelijkingen met betrekking tot het bestaan van symmetrieën werd uitgevoerd door Sanders en Wang in 1998. Zij was gebaseerd op:

   - de symbolische calculus die geïntroduceerd werd in 1975 door Gel'fand and Dikiĭ
   - een impliciete functiestelling, die laat zien dat onder bepaalde condities het bestaan van één symmetrie integreerbaarheid impliceert.

   Een bepaalde conditie in de impliciete functiestelling werd bewezen door F. Beukers, die gebruik maakte van recente resultaten uit diophantische approximatie theorie.

   Voor $\lambda > 0$ werd een volledige lijst van tien integreerbare vergelijkingen verkregen.

3. De vergelijking die in 1991 gegeven werd door Bakirov:

   $$\begin{cases} u_t = & 5u_4 + v^2 \\ v_t = & v_4 \end{cases}$$

   heeft een symmetrie van orde 6. De computerberekeningen van Bakirov lieten zien dat er geen andere symmetrie bestaat van orde $n < 53$. Met behulp van de $p$-adische methode van Skolem bewezen Beukers, Sanders en Wang in 1998 dat de vergelijking van Bakirov slechts één gegeneraliseerde symmetrie bezit.

4. Op basis van de stelling van Lech en Mahler werd een vermoeden geformuleerd dat er binnen de klasse van vergelijkingen

   $$\begin{cases} u_t = & a_1 u_n + v^2 \\ v_t = & a_2 v_n \end{cases}$$

een eindig aantal integreerbare vergelijkingen bestaat. Dit bleek inderdaad het geval. Gebruikmakend van een recent algoritme van Smyth, dat polynomiale vergelijkingen $p(x, y) = 0$ oplost voor eenheidswortels $x, y$, werd de volledige lijst verkregen door Beukers, Sanders en Wang in 2001.

5. De hierboven aangehaalde classificaties onderscheiden zich van andere, doordat de orde van de te classificeren vergelijkingen niet vast gekozen werd.

   Om een recent voorbeeld aan te halen: in 2000 classificeerde Foursov symmetrisch gekoppelde homogene derde orde vergelijkingen met twee componenten $u, v$ van gewicht 2. Interessant vond ik het vermoeden van Foursov dat de vergelijking
$$\begin{cases} u_t = & u_3 + 3uu_1 \\ v_t = & \alpha u_1 v + uv_1 \end{cases}$$
   alleen symmetrieën van een even gewicht heeft als $\alpha$ een negatief rationeel getal is.

# Waar draagt dit proefschrift aan bij?

De belangrijkste resultaten die ik behaalde tijdens mijn onderzoek zijn:

1. *De classificatie van integreerbare $\mathcal{B}$-vergelijkingen.* Deze is te vinden in hoofdstuk 6. $\mathcal{B}$-vergelijkingen zijn vergelijkingen van de vorm:
$$\begin{cases} u_t = & a_1 u_n + K(v, v_1, \ldots) \\ v_t = & a_2 v_n \end{cases}$$
   waarbij $K$ quadratisch is. De conditie voor het bestaan van oneindig veel symmetrieën is equivalent met: er is een zekere $r \in \mathbb{C}$ zodanig dat

   (a) $a_1, a_2$ en $r$ voldoen aan
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1 + r^n}{(1 + r)^n}.$$
   (b) de diophantische vergelijking
$$(1 + r)^m(1 + \bar{r}^m) = (1 + \bar{r})^m(1 + r^m), \quad r \in \mathbb{C}$$
   heeft oneindig veel oplossingen $m$ inclusief $m = n$.

   De introductie van 'biunit coordinates' maakte het mogelijk te bewijzen dat er precies
$$\begin{array}{rll} n(n-2)/4 & \text{indien} & n \text{ even}, \\ (n+1)(n-3)/4 & \text{indien} & n \text{ oneven}, \\ 4 & \text{indien} & n = 5 \end{array}$$

niet-gedegenereerde $n$-de orde integreerbare $\mathcal{B}$-vergelijkingen bestaan en dat de ordes van hun symmetrieën gegeven worden door

$$m \equiv 1 \bmod n-1 \quad \text{of} \quad m \equiv 0 \bmod n.$$

2. *De diophantische benadering van integreerbaarheid.* Door de conditie voor integreerbaarheid te schrijven als een diophantische vergelijking voor de nulpunten van $\mathcal{G}$-functies kan het lineaire gedeelte van de vergelijking bepaald worden. Deze benadering is zeer effectief en toepasbaar binnen een grote klasse van vergelijkingen.

   In hoofdstuk 5 kijken we vanuit deze benadering opnieuw naar de classificatie van scalaire vergelijkingen. Het gebruik van de stelling van Lech and Mahler maakt het mogelijk de integreerbare vergelijkingen te classificeren, zonder daarbij gebruik te maken van diophantische approximatie theorie.

   In Hoofdstuk 7 bepalen we het spectrum van integreerbare vergelijkingen in twee componenten $u, v$ met quadratische termen. Ook classificeren we het cubische analogon van de klasse van $\mathcal{B}$-vergelijkingen.

3. *Het vermoeden van Fokas.* In hoofdstuk 8 wordt bewezen dat de vergelijking

$$\begin{cases} u_t = & 2r^2u_7 + 7(2r^2+4r+3)(v_3v_0 + (3-r)v_2v_1) \\ v_t = & (16r^2+28r+21)v_7 \end{cases},$$

   waarin $r^3 + r^2 - 1 = 0$, precies twee symmetrieën heeft. Dit falsificeert het vermoeden van Fokas.

   Ondanks uitvoerige computer-algebraïsche berekeningen zijn er geen andere tegenvoorbeelden gevonden. Een nieuw vermoeden is dat het enige gehele getal $N > 2$ waarvoor geldt:

   > er bestaan $r, s \in \mathbb{C}$ zodanig dat de diophantische vergelijking
   >
   > $$(1+r^m)(1+s)^m = (1+s^m)(1+r)^m$$
   >
   > precies $N$ oplossingen $m > 1$ heeft.

   het getal $N = 3$ is en dat in dit geval de enige oplossingen $m = 7, 11, 29$ zijn.

4. *Het vermoeden van Foursov.* In hoofdstuk 9 zien we dat het vermoeden van Foursov juist is binnen de context van polynomiale symmetrieën. Echter, als we vermenigvuldiging met $v^c$ (waar $c \in \mathbb{C}$) toestaan, dan blijkt het voor elke $\alpha \in \mathbb{C}$ mogelijk om niet-commuterende hierarchieën van symmetrieën te vinden.